



Artículo de investigación

<https://doi.org/10.61767/mjte.001.1.2834>Gómez-Sánchez *et al.*, 2022

Recibido: 30-12-2021

Revisado: 05-03-2022

Aceptado: 10-04-2022

Publicado: 29-04-2021

ANÁLISIS COMPARATIVO DE TIPO CINEMÁTICO Y DINÁMICO PARA ARQUITECTURAS ROBÓTICAS CARTESIANAS

Á. Gómez-Sánchez^{1*}, U. Gómez-Sánchez², S. Martínez-Rueda¹, B.H. Espinosa-Ramírez¹, R. Estrada-Martínez¹, J.M. Castillo-Minjarez¹ y L. Chávez-Escalante¹

^{1*} Universidad Tecnológica de Tecámac. División de Electromecánica Industrial. Carretera México-Pachuca km 37.5, Col. Sierra Hermosa C.P. 55740, México.

² Global Innovation Technologies GLINTEC, Research Department. 55745. México

Correspondencia: dgomezs@utecamac.edu.mx*

Resumen

El presente artículo establece la comparación realizada entre dos configuraciones robóticas de tipo cartesiano: *Cantilever* y *Gantry*. El análisis de los modelos cinemático y dinámico permitió conocer las condiciones y parámetros de operación en la elección de la arquitectura robótica con base a la tarea a desarrollar. Asimismo, se demostró que, entre ambas configuraciones bajo estudio, existen similitudes propias a la arquitectura de los robots; sin embargo, la configuración o disposición de los eslabones y actuadores cambia las ventajas mecánicas entre ambas configuraciones. No obstante, la configuración *Gantry* mostró un mejor desempeño para la manipulación de objetos pesados dentro del espacio de trabajo.

Palabras clave: Cantilever, Gantry, modelo matemático dinámico, modelo matemático cinemático.

1. Introducción

Gran parte del desarrollo tecnológico ha sido alcanzado gracias a la automatización de líneas de producción, con las cuales la fabricación de bienes a gran escala ha posibilitado que la mayoría de la población acceda a ellos y, por lo tanto, se adquiera un mejor estilo de vida. Estos avances de manera significativa, se empezaron a gestar en la década de los 80's [1, 2, 3], con el surgimiento de arquitecturas robóticas de cadena abierta como una opción para ayudar al ser humano en las

tareas cotidianas, monótonas y sobre todo peligrosas, sin embargo, la maniobrabilidad y manipulabilidad exhibida por ellas no era lo suficientemente buena como para reemplazar al operador humano, ya que el tiempo en la realización de la tarea se consideraba excesivo y con poca precisión y baja repetibilidad [3, 4]. Sin embargo, también se dio comienzo a los trabajos de arquitecturas robóticas de cadena cinemática cerrada, las cuales resultaron benéficas para el desarrollo de tareas que demandan transportar



Artículo de investigación

Gómez-Sánchez *et al.*, 2022

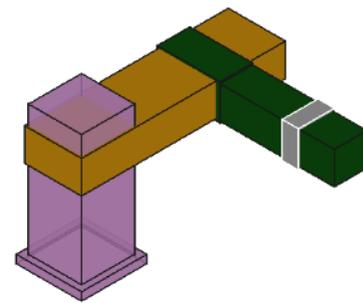
cargas pesadas de un punto en el espacio a otro (*pick and place*). En este respecto, los robots pueden interactuar o no con su entorno, si no existe interacción entonces se dice que su desplazamiento es libre por todo el espacio de trabajo. Las características por considerar para el desarrollo matemático en el presente artículo son: *i)* el robot está provisto de eslabones rígidos, *ii)* no existe fricción entre las uniones de los eslabones y *iii)* los actuadores son ideales.

El artículo está organizado como sigue. En la sección 2 se define la estructura mecánica, así como el tipo de articulaciones empleadas para los robots de tipo cartesiano. En la sección 3 se muestra el planteamiento matemático que describe al modelo cinemático directo e inverso de la configuración cartesiana. Para la sección 4 se presenta el modelado dinámico de las dos posibles configuraciones robóticas cartesianas mediante ecuaciones diferenciales, representación de estados y la ecuación generalizada de tipo matricial. También en 5 se discuten las similitudes y diferencias encontradas a partir de los modelos matemáticos para cada una de las configuraciones expuestas en el presente artículo

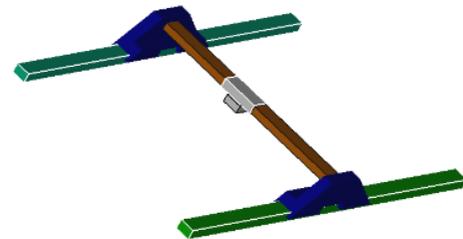
2. Configuración cartesiana

Se nombra robot cartesiano porque sus desplazamientos son realizados acorde a un marco de referencia ortogonal cartesiano [1, 2, 3]. Generalmente, los actuadores con los que está construido son de tipo rotacional (motores a paso o servomotores) con un mecanismo que transforma la rotación a movimientos de traslación y, en general, se emplean poleas dentadas, porque se minimizan ruidos y patinamientos entre la banda y la polea que interfieran con la colocación correcta del efector final dentro del espacio de trabajo. En la figura 1 se representan las dos configuraciones cartesianas *Cantilever* y *Gantry*, que serán analizadas en futuras secciones. Estas configuraciones son de gran utilidad en tareas de soldado pintado, corte

de materiales, colocación de objetos en distintos puntos del espacio de trabajo entre otras. Sin embargo, esencialmente son empleadas en tareas que requieren trabajar en el plano 2D porque los movimientos son mapeados con menor dificultad enviándose comandos de control a los actuadores del robot de manera directa. Los movimientos de este tipo de robots pueden ser analizados por modelos cinemáticos y dinámicos por lo que, se abordarán en las siguientes secciones.



a) *Cantilever*



b) *Gantry*

Figura 1. Configuraciones cartesianas.

3. Modelo cinemático

Es bien conocido que el estudio de los manipuladores robóticos tiene dos vertientes para su estudio, las cuales son: *i)* cinemática directa y *ii)*

$$\mathbf{x} = f(q_n) \quad \forall n = \{1, 2, 3, \dots\} \quad (1)$$



Artículo de investigación

Gómez-Sánchez *et al.*, 2022

cinemática inversa [5, 6]. En la ecuación 1 se describe la relación existente entre las posiciones articulares con la posición y orientación del efector final.

Donde $X \in \mathbb{R}^3$ representa un vector en el espacio y q_n las posiciones articulares del manipulador, mismas que pueden ser de tipo rotacional, prismática o esférica. Considerando la configuración cartesiana mostrada en la Figura 1 del lado izquierdo (Cantilever), la cual tiene uniones de tipo prismáticas, se decide ubicar el referencial global ortogonal en la base del robot; hacia arriba indicado el eje Z, en dirección del segundo eslabón al eje Y, y por último, en dirección al tercer eslabón al eje X tal como se observa en la figura 3. Es importante notar que la elección de las direcciones, asimismo la ubicación del referencial es arbitraria, estableciéndose con la premisa de facilitar el análisis posterior.

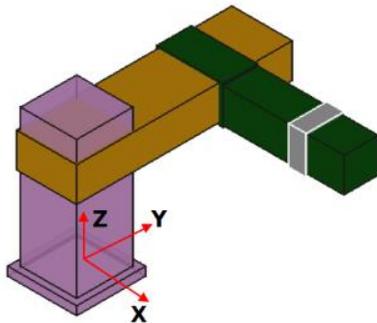


Figura 2. Referencia coordenada para robot cartesiano Cantilever.

$$\left. \begin{matrix} x = f(q_x) \\ y = f(q_y) \\ z = f(q_z) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} x = q_x \\ y = q_y \\ z = q_z \end{matrix} \right\} \quad (2)$$

Sea Γ el espacio de trabajo del robot entonces $X \subset \Gamma$ y el sistema de ecuaciones en (2) representa la cinemática directa del robot cartesiano *Cantilever* (no compensada en gravedad).

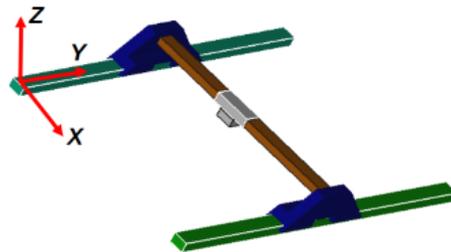


Figura 3. Referencial coordenado del robot cartesiano *Gantry*.

Analizando la cinemática para la configuración *Gantry*, se asigna el referencial ortogonal en la base de un soporte del robot donde los ejes X y Y se establecen acorde al movimiento de los eslabones, mientras que el eje Z es contrario al desplazamiento que realiza el efector final. La figura 3 muestra la disposición del referencial global sobre el robot para iniciar con el análisis cinemático.

Considerando que la configuración *Gantry* utiliza uniones prismáticas equiparables al movimiento sobre cada uno de los ejes del referencial, las ecuaciones cinemáticas son las siguientes.

Se hace notar que las ecuaciones 2 y 3 son iguales no obstante son configuraciones diferentes.

$$\left. \begin{matrix} x = f(q_x) \\ y = f(q_y) \\ z = f(q_z) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} x = q_x \\ y = q_y \\ z = q_z \end{matrix} \right\} \quad (3)$$

Para ambas configuraciones estudiadas anteriormente, el vector en el espacio está dado por $X = [x, y, z]^T$ y describe la posición del efector final en el espacio de trabajo establecido por las condiciones de los eslabones para cada una de las configuraciones. Mientras que el problema de la cinemática inversa implica conocer las posiciones articulares del manipulador, tal que sea cumplida

$$q = f^{-1}(X) \quad (4)$$



Artículo de investigación

Gómez-Sánchez *et al.*, 2022

la restricción de posición y orientación en el efector final. Por lo que, es posible representarla mediante la ecuación 4.

A diferencia del modelado cinemático directo, el inverso puede tener una solución, múltiples soluciones o simplemente ninguna solución; todo depende de la configuración robótica bajo estudio. Además, parte importante en el estudio cinemático es que no se consideran los efectos inerciales causados por los elementos que conforman a la configuración robótica; para ello, los actuadores se consideran ideales. Tomando en cuenta una asignación similar del marco de referencia planteado en la Figura 2, mientras que haciendo referencia a la Figura 3 se observa la disposición de los ejes que definen el avance de la variable de posición en el espacio de trabajo; siendo entonces posible plantear las ecuaciones que definen a la cinemática inversa.

$$\left. \begin{matrix} q_x = f^{-1}(x) \\ q_y = f^{-1}(y) \\ q_z = f^{-1}(z) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} q_x = x \\ q_y = y \\ q_z = z \end{matrix} \right\} \therefore q = X \quad q, X \in \mathbf{R}^3 \quad (5)$$

Observando las ecuaciones (2) y (3) mismas que representan a la cinemática directa para ambas configuraciones, y tomando en consideración a la ecuación (4) misma que representa a la cinemática inversa el sistema de ecuaciones mostrado en (5) define de forma precisa a las ecuaciones cinemáticas inversas para ambas configuraciones, observándose que las coordenadas articulares son iguales a las coordenadas espaciales demostrándose que no existe diferencia entre la cinemática directa e inversa para las configuraciones bajo estudio.

4. Modelado dinámico

El modelado dinámico conlleva a la obtención de sistemas de ecuaciones diferenciales generalmente de segundo orden de tipo vectorial [1,6]; las cuales, describen las posiciones

articulares (q) o bien cartesianas (X) de la arquitectura robótica. Este tipo de modelado permite conocer condiciones para definir el correcto funcionamiento del robot, es decir, si el robot puede alcanzar algún punto dentro del espacio de trabajo para el cual ha sido encomendado en todo momento, considerando las interacciones que intrínsecas y extrínsecas; de encontrarse alguna singularidad en el modelado matemático, se infiere la imposibilidad de alcanzar dicho punto, por lo que es conveniente reajustar las consignas de movimiento por medio de alguna ley de control que comande la dinámica de los actuadores. Tal como lo refiere Spong [7], el modelado dinámico puede ser expresado por la ecuación 6.

$$g(X, \dot{X}, \ddot{X}, \tau) = 0 \quad (6)$$

Acorde a la figura 4, se observa la distribución de los centros de masa aplicados para cada uno de los eslabones correspondientes a cada una de las configuraciones robóticas cartesianas, ya que es importante definir un punto de referencia sobre cada uno de los eslabones que presentan alguna dinámica; asimismo la ubicación del referencial global necesario para la medición de las variables de interés tales como la posición espacial y sus derivadas. Se hace notar que el centro de masa es variable en función al desplazamiento que tienen los eslabones.

El modelado dinámico de la configuración *Cantilever* asimismo de la *Gantry* son definidas por el siguiente par de sistema de ecuaciones diferenciales respectivamente, las cuales fueron obtenidas mediante la teoría del modelado por energías [8, 9].

$$\underbrace{\left. \begin{matrix} (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{z} + (m_1 + m_2 + m_3)g = F_z \\ (m_2 + m_3)\ddot{y} = F_y \\ m_3\ddot{x} = F_x \end{matrix} \right\}}_{\text{a) Conf. cantilever}} \quad \underbrace{\left. \begin{matrix} m\ddot{z} + mg = F_z \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{x} = F_x \end{matrix} \right\}}_{\text{b) Conf. Gantry}} \quad (7)$$



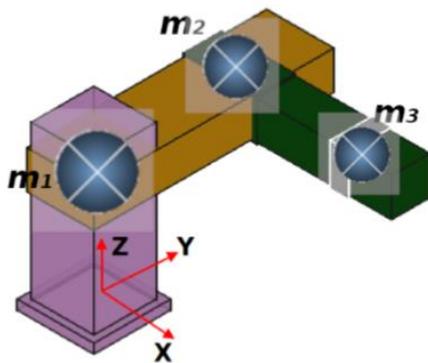
Artículo de investigación

Gómez-Sánchez *et al.*, 2022

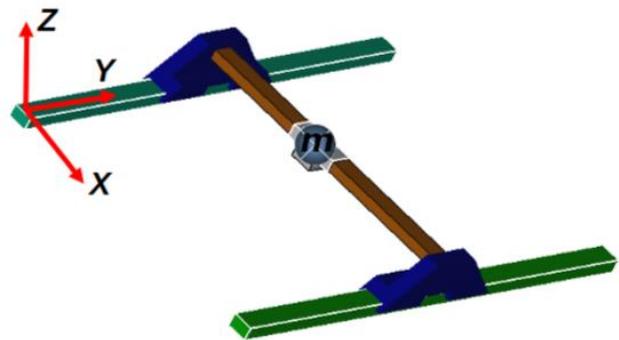
Donde: $m_1, m_2, m_3, m, g \in R^+$. F_x, F_y, F_z son excitaciones externas hacia el robot con la finalidad de crear movimientos sobre los eslabones. Estas excitaciones pueden ser de tipo *i)* impulso, *ii)* escalón, *iii)* rampa, *iv)* sinusoidal, o bien alguna combinación de todas las anteriores. Mostrando la representación en términos de los estados para las ecuaciones presentadas en (7) son definidas en (8).

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \dot{l}_z \\ \dot{l}_y \\ \dot{l}_x \\ \dot{i}_z \\ \dot{i}_y \\ \dot{i}_x \end{pmatrix}}_{\text{Conf. Cantilever}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{i}_z \\ \dot{i}_y \\ \dot{i}_x \\ \frac{F_z - g(m_1 + m_2 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3} \\ \frac{F_y}{(m_2 + m_3)} \\ \frac{F_x}{m_3} \end{pmatrix}}_{\text{Conf. Gantry}} \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{l}_z \\ \dot{l}_y \\ \dot{l}_x \\ \dot{i}_z \\ \dot{i}_y \\ \dot{i}_x \end{pmatrix}}_{\text{Conf. Gantry}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{i}_z \\ \dot{i}_y \\ \dot{i}_x \\ \frac{F_z - gm}{m} \\ \frac{F_y}{m} \\ \frac{F_x}{m} \end{pmatrix}}_{\text{Conf. Gantry}} \quad (8)$$

Autores como Koren [10], Dombre and Khalil [11] y Pashkevich [4] describen el modelo dinámico de manipuladores robóticos de forma compacta por la ecuación 9.



(a) No compensada.



(b) Compensada

Figura 4. Configuraciones cartesianas con centros de masa.

$$\underbrace{M(q) = \begin{pmatrix} m_1 + m_2 + m_3 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 + m_3 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}}_{\text{Conf. cantilever}} \quad C(q, \dot{q}) = 0 \quad g(q) = \begin{pmatrix} (m_1 + m_2 + m_3)g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\underbrace{M(q) = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}}_{\text{Conf. Gantry}} \quad C(q, \dot{q}) = 0 \quad g(q) = \begin{pmatrix} mg \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Para ambos casos $F = [F_z, F_y, F_x]^T$. La ventaja de esta representación radica en las propiedades fácilmente comprobables para cada uno de los

elementos que conforman a la ecuación generalizada establecida en (9).

5. Relaciones comparativas entre la configuración Gantry y Cantilever

Con base en el análisis presentado en las secciones previas, las comparaciones se centran en las ecuaciones obtenidas referentes a la cinemática directa y a la cinemática inversa para las arquitecturas robóticas de tipo Gantry y Cantilever.



Artículo de investigación

Gómez-Sánchez *et al.*, 2022

- Tomando en cuenta las ecuaciones relacionadas al **análisis de la cinemática directa** las cuales son etiquetadas con 2 y 3 en la sección 3, muestran que el modelado matemático que define los movimientos para cada una de las articulaciones del robot tanto de tipo Cantilever como Gantry son las mismas, lo cual implica que el mapeo para el movimiento de las articulaciones se realiza de manera directa siempre y cuando las articulaciones sean de tipo prismático esto es, las coordenadas espaciales y articulares tienen un mapeo directo entre sí. Ahora, la comparación para la cinemática directa entre ambas configuraciones plantea que el mapeo es el mismo entre las coordenadas espaciales y las coordenadas articulares, esto es cierto cuando las arquitecturas han sido construidas con uniones prismáticas.
- El análisis dinámico contempla interacciones físicas que provocan la dinámica del sistema haciendo un análisis más cercano a su comportamiento real. Por lo que, considerando la configuración *Cantilever* (ecuación 7a) que plantea la condición $m_1 \gg m_2 \gg m_3 > 0$, se tendrá una estructura rígida capaz de cargar un objeto con masa no despreciable; el cual, no deforma a los eslabones de esta configuración. También se observa que la sumatoria de inercias impacta al vector de gravedad, causando que el peso se incremente y, en consecuencia, la potencia de los actuadores se incrementa. En cambio, para la configuración *Gantry* (ecuación 7b), se destaca la masa del efector final como factor a ser considerado. Además, en caso de no ejercer acción sobre el eje Z ($F_z = 0$) existe en todo momento una fuerza de atracción; la cual, es producto de la acción gravitacional sobre la masa (mg). Asimismo, las ecuaciones 10 y 11, muestran que para ambas configuraciones cumplen con las condiciones deseadas para lograr convergencia en el posicionamiento espacial indicado por la matriz de inercia (simétrica y definida positiva). En este caso la matriz de Coriolis es nula, lo que resulta una condición

deseable para garantizar la estabilidad en los movimientos articulares del robot.

- Considerando las características de los modelos obtenidos con los análisis cinemáticos (directo e inverso) y dinámico, los movimientos de los robots para ambas configuraciones son realizados de manera directa, sin requerir complejas consignas de control. Por lo que se podrían realizar tareas simples como soldado, pintado, corte, entre otras.

6. Conclusión

Se ha observado que la configuración *Cantilever* plantea mayor complejidad ya que son necesarios eslabones y actuadores más robustos en comparación con la configuración *Gantry*; sin embargo, la maniobrabilidad es similar para ambas configuraciones. Una desventaja particular de la configuración *Gantry* es el requerimiento de espacio físico para la realización de tareas e instalación del robot. Por lo tanto, la configuración *Gantry* resulta más conveniente para la operación de un robot de tipo cartesiano.

7. Referencias

- [1] Craig John J. (2009). Introduction to robotics: mechanics and control. Ed. Pearson Education. ISBN 9702607728
- [2] Critchlow Arthur J. (1985). Introduction to robotics. Ed. Macmillan. ISBN 978-0023255908
- [3] Subir Kumar Saha. (2008). Introduction to robotics. Ed. McGraw-Hill Education. ISBN 9780070669000. pp 321.
- [4] Pashkevich Anatol. (2009). Welding automation. In Springer handbook of automation. pp. 1027–1040. Berlin: Springer.
- [5] Lenarcic Jadran and Merlet Jean-Pierre. (2018). Advances in robot kinematic. Proceedings of the 15th meeting, ARK, June 27–30, 2016, volume 4. Cham: Springer.



Artículo de investigación

Gómez-Sánchez *et al.*, 2022

[6] Selig Jon M. (2005). Geometric fundamentals of robotics, volume 128. Springer pp.140.

[7] Spong M. W. (1987). Modeling and control of elastic joint robots. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control. pp 310–319.

[8] Lynch Kevin M. and Park Frank C. (2017). Modern robotics. Ed. Cambridge University Press. ISBN 1107156300.

[9] Siciliano Bruno, Sciavicco Lorenzo, Villani Luigi, and Oriolo Giuseppe. (2009). Modelling, planning and control. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. Ed. Springer. ISBN 1846286417.

[10] Yoram Koren. (1985). Robotics for engineers, volume 168. Ed. McGraw-Hill New York. ISBN 0070353999.

[11] Etienne Dombre and Wisama Khalil. (2013). Robot Manipulators: Modeling, Performance Analysis and Control. Ed. John Wiley & Sons. ISBN 1118614100.